



Cycle des Ingénieurs
des Travaux Informatiques
Licence Professionnelle en Informatique

Année Académique : 2020 – 2021
Parcours : ITI / LPI

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ière} ANNEE (PROMOTION 2020 – 2023)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Session de Novembre 2020)

NB: Documents de cours non autorisés Coef: 06 Date: 24/11/2020 Durée: 4 H 00 mn

Calculatrice programmable non autorisée ; N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.

Exercice 1

(5 pts)

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs; chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard. On définit les événements suivants: M " l'individu est malade" et T " le test est positif ".

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire. (1 pt)
2. Quelle est la probabilité
 - a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif? (0,5 pt)
 - b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif? (0,5 pt)
 - c) qu'il ait un test positif? (0,5 pt)
 - d) qu'il ait un test négatif? (0,5 pt)
3. Calculer la probabilité
 - a) qu'il ne soit pas malade sachant que le test est positif. (1 pt)
 - b) qu'il soit malade sachant que le test est négatif. (1 pt)

Exercice 2

(5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2 cm). B, C, D sont des points du plan tels $OBCD$ soit un rectangle avec B et D d'affixes respectifs 1 et $2i$.

1. Déterminer l'affixe du point C . (0,5 pt)
2. Faire une figure. (0,5 pt)
3. Soit M le milieu de $[BC]$ et soit s la similitude directe telle que $s(O) = M$ et $s(B) = D$.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de s . (1 pt)
 - b) Déterminer les éléments caractéristiques de s . On désignera par Ω son centre. (1 pt)
4. Soit I le symétrique de D par rapport à M . Démontrer que les points O, Ω, M et I appartiennent à un même cercle (C) . Vérifier que B est le centre de (C) et donner son rayon. Construire le cercle (C) . (2 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité graphique : 4cm.

A/ Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Etudier le sens de variation de g et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans $[0; +\infty[$.
b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B/

1. a) Montrer que pour tout x positif,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

- b) En déduire le sens de variation de f .

2. a) Montrer que pour tout réel positif x ,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

- b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a) Etablir que

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

- b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 0.

5. a) Etablir que pour x appartenant à $[0; +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

- b) Etudier le sens de variation de u sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

- c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe C par rapport à la droite (T).

6. Tracer C et (T).

C/

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$.
2. On note D le domaine délimité par la courbe C , la tangente (T) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D .
3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

- a) Calculer v_0, v_1 et v_2 .
- b) Interpréter graphiquement v_n .
- c) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

- d) Déterminer la limite de la suite (v_n) .